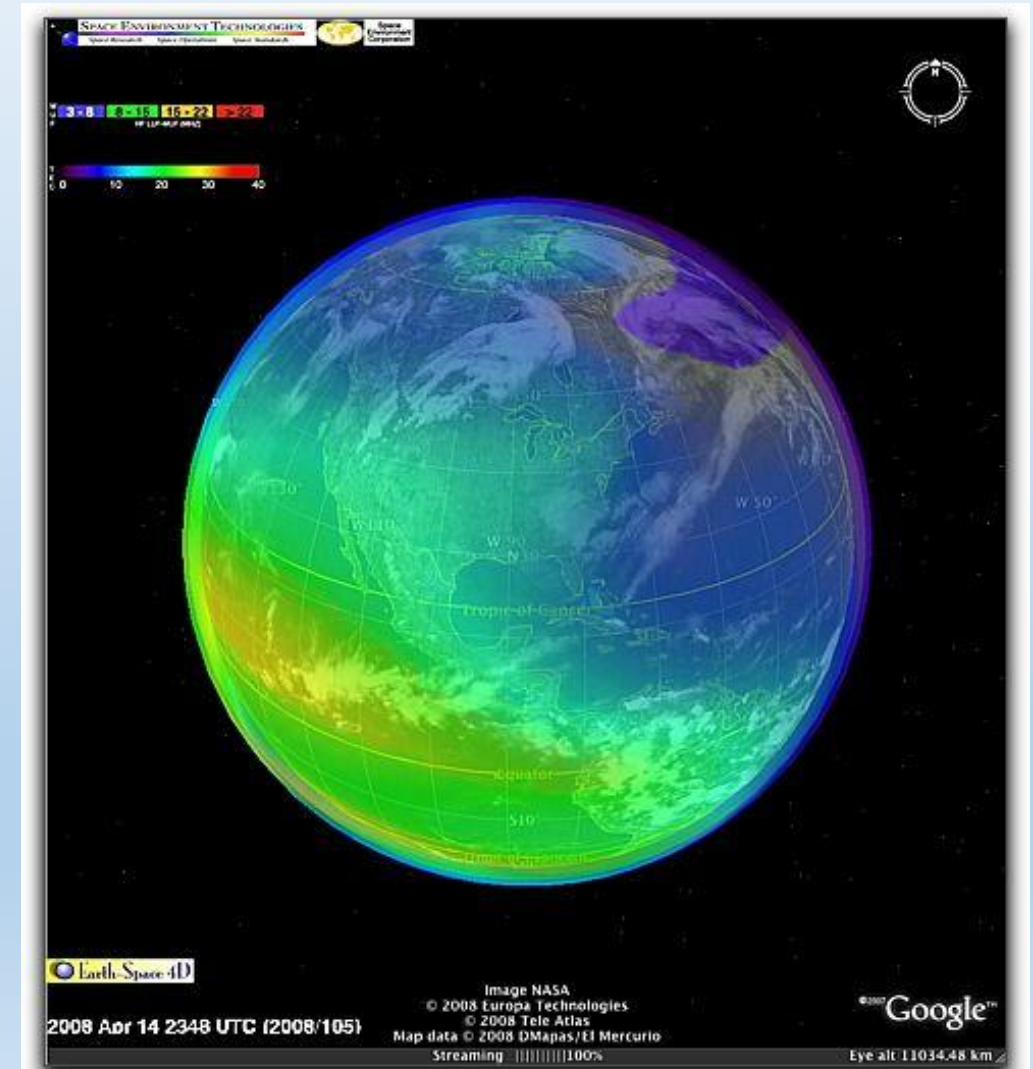
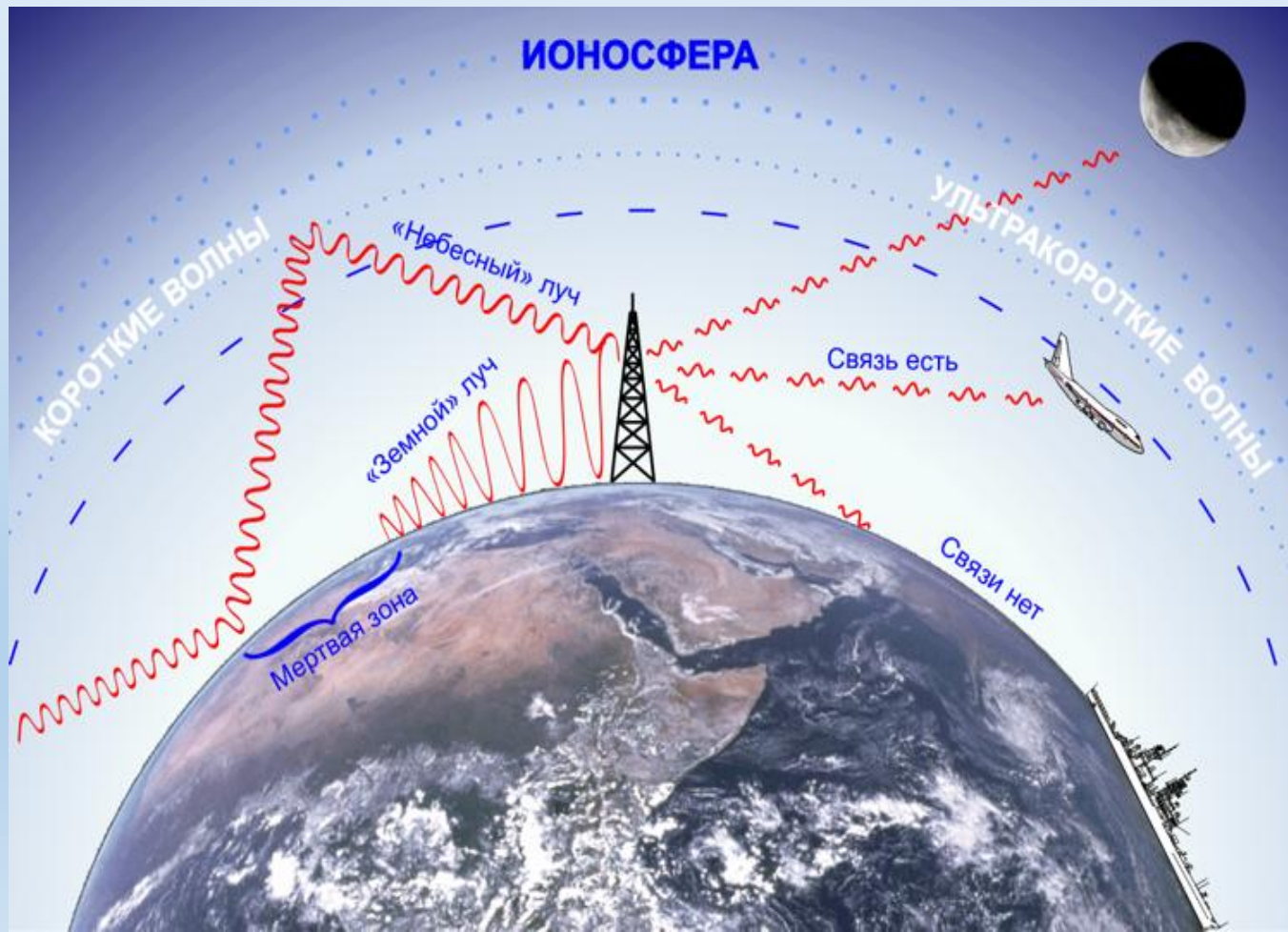


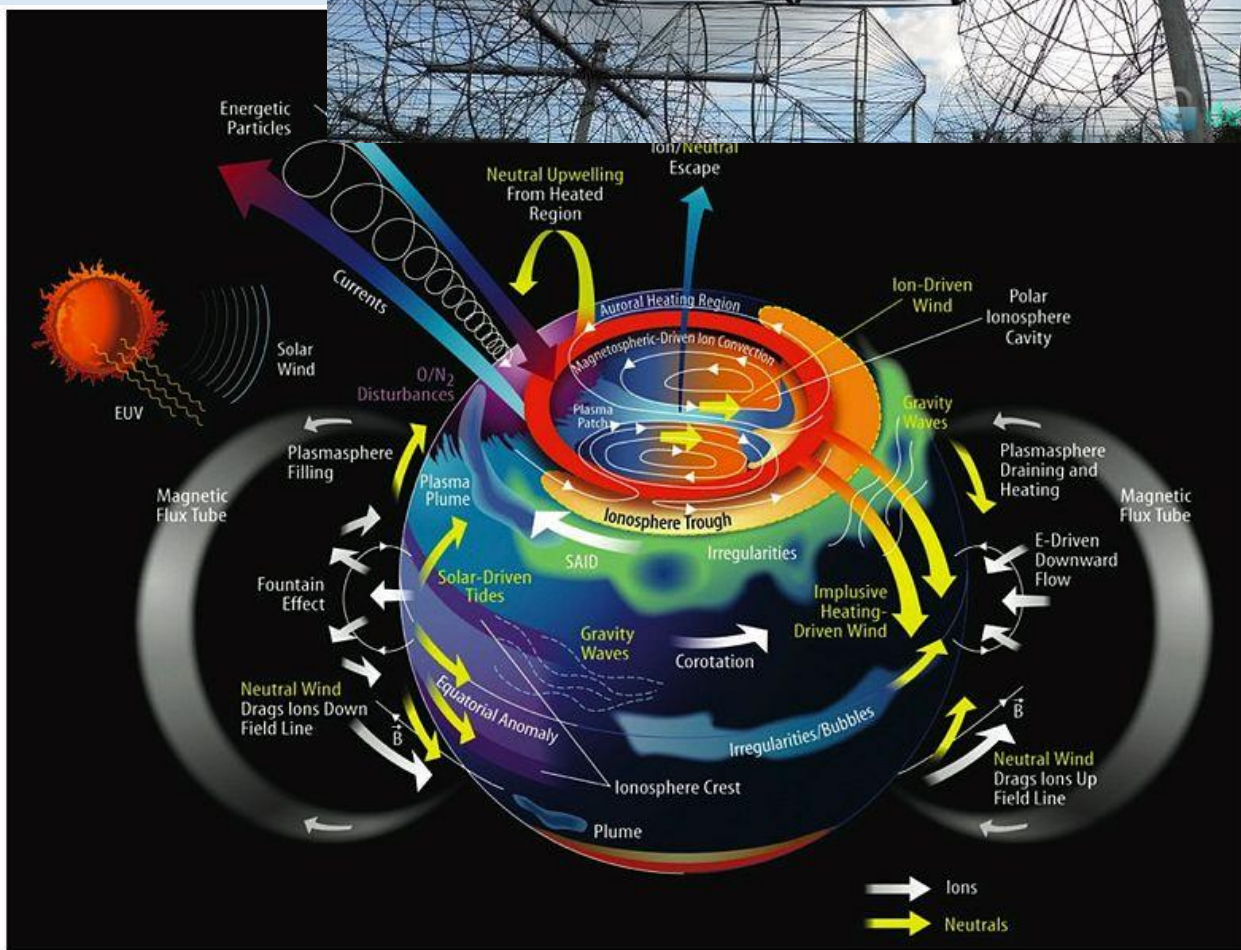
**МЕТОД КОНЕЧНЫХ
РАЗНОСТЕЙ В ЧАСТОТНОЙ
ОБЛАСТИ (FDFD) В
МОДЕЛИРОВАНИИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ
КОРОТКИХ РАДИОВОЛН**

Структура верхней атмосферы Земли – ионосфера, оказывает существенное влияние на распространение электромагнитных волн различных диапазонов и влияет на работу систем радиолокации, позиционирования, радионавигации.





Благодаря ионосфере радиоволны коротковолнового (КВ) диапазона обеспечивают радиосвязь на дальние расстояния и позволяют решать проблемы загоризонтного радиозондирования. Поэтому изучение влияния нерегулярной структуры ионосферы на характер распространения радиоволн является актуальным.



Изучение распространения волн в реальной ионосфере Земли сопряжено с известными трудностями решения дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Число задач, для которых найдено точное решение, невелико, и они, естественно, не охватывают всего многообразия реальных характеристик неоднородных сред, представляющих непосредственный интерес для практического исследования.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}(\vec{x}) \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n B_k(\vec{x}) \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} + C(\vec{x}) f(\vec{x}) + D(\vec{x}) = 0$$

Современные методы моделирования распространения коротких радиоволн (последние 4 года)

- Метод бихарактеристик (РосНОУ) – решение уравнения эйконала (геометрическая оптика).
- Аналитическое интегрирование по траектории в параболическом слое без учёта магнитного поля. (Институт космофизических исследований СО РАН).
- Лучевой метод (Московский технический университет связи) - закон преломления (геометрическая оптика).
- Метод волновода (Институт прикладной геофизики).
- Принцип Ферма (ОНИИП).
- ...

Плюсы лучевого подхода:

- Исключительная простота
- Возможность быстрого получения решения для широкого круга задач.

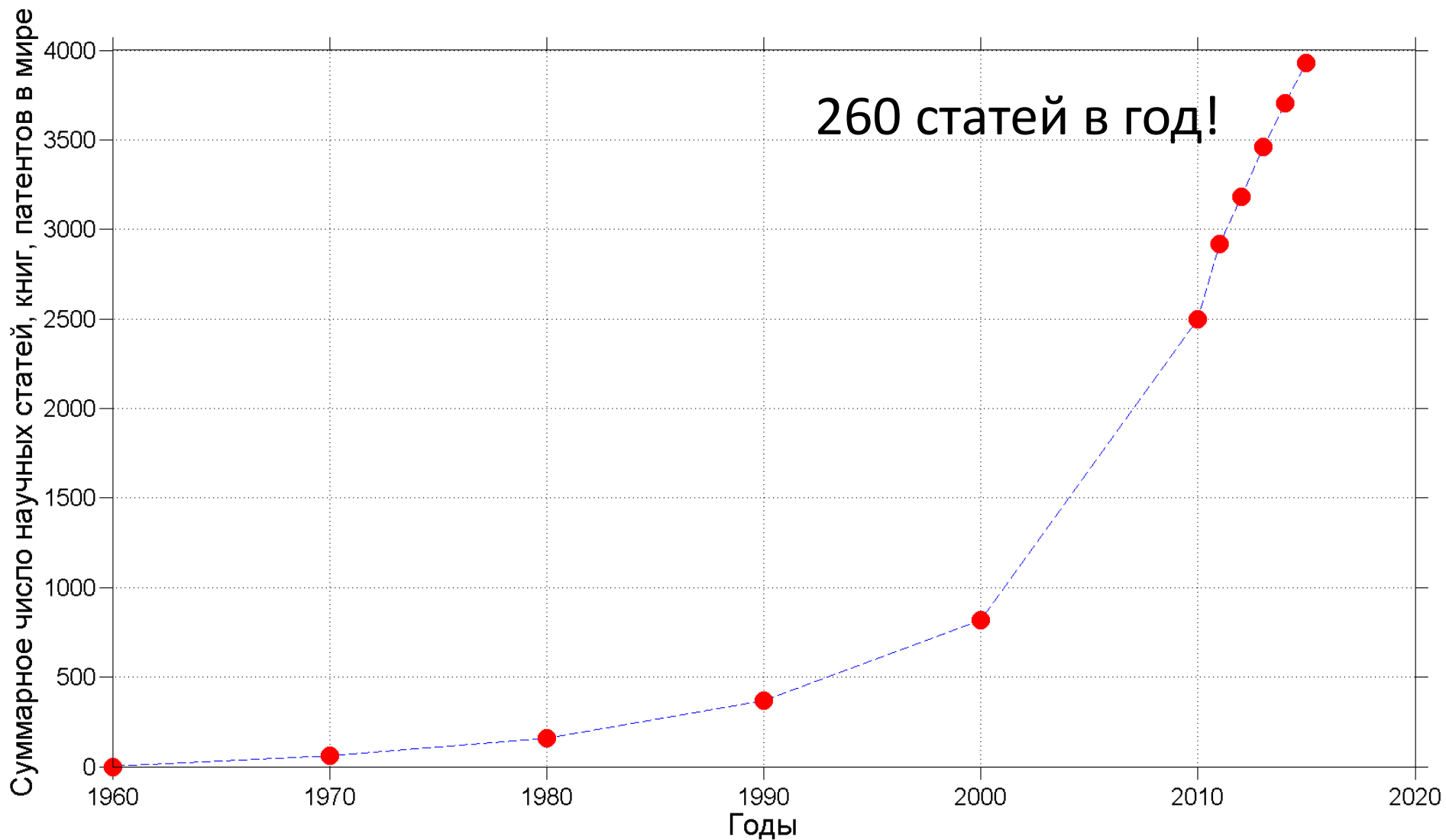
Минусы лучевого подхода:

- Переход к лучевому приближению не даёт решения уравнений Максвелла или волнового уравнения в общепринятом смысле этого слова, а представляет собой лишь сведение волновой задачи к решению более простых уравнений в отсутствие особых точек.
- Интерференция и дифракция находятся вне области использования лучевого подхода.
- Необходимо отдельно рассчитывать энергетические и поляризационные характеристики.

Метод конечных разностей в частотной области (Finite Difference Frequency Domain)

- Сегодня FDFD-метод широко применяется для решения многих проблем в науке и технике, и завоевывает все большую популярность благодаря быстро увеличивающейся памяти и скорости ПК.
- Он представляет уравнения Максвелла в частотной области и решает дифференциальные уравнения методом конечных разностей.
- Позволяет получить полное описание состояния поля для монохроматического сигнала с заданной точностью.

Популярность метода FDFD в мире



Область применения FDFD

- Распространение сверхнизких и низких частот, Шумановский резонанс,
- метаматериалы,
- полосовые фильтры,
- графен,
- фотонные кристаллы,
- томография органов,
- моделирование работы процессоров,
- ...

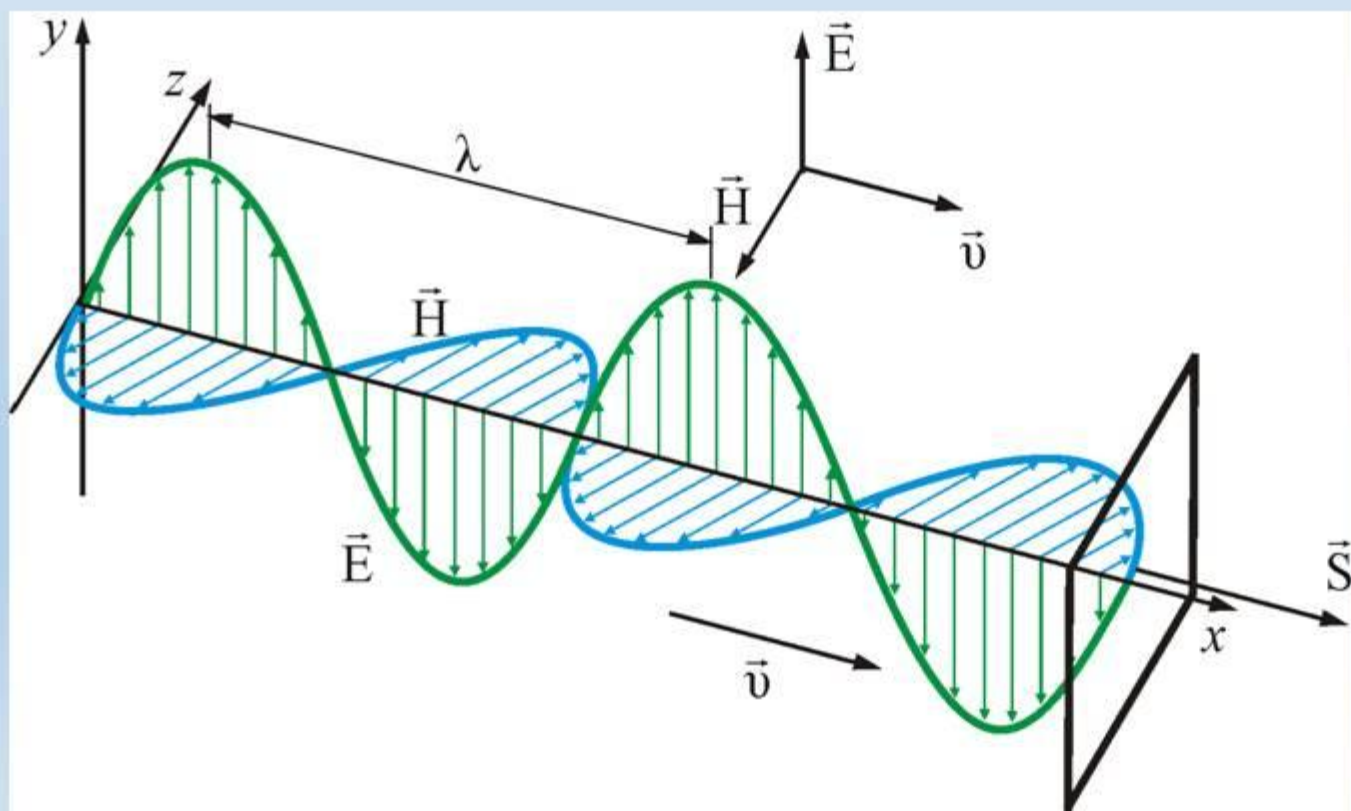
Применение FDFD-метода для 1-D волнового уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} E(x) + k(x)^2 E(x) = i\omega\mu(x)\mu_0 J(x)$$

$k(x)$ - волновое число,

$J(x)$ - плотность внешнего тока,

$\mu(x)$ - магнитная проницаемость.



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} E(x) + k(x)^2 E(x) &= i\omega\mu(x)\mu_0 J(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} E(x) &\approx \frac{E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}}{\Delta x^2} + k_i^2 E_i = i\omega\mu_i\mu_0 J_i$$



$$E_{i+1} - 2 - k_i^2 \Delta x^2 E_i + E_{i-1} = i\omega\mu_i\mu_0 J_i \Delta x^2$$

Матрицы сдвига

Пример:

Верхняя матрица сдвига

$$U_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нижняя матрица сдвига

$$L_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$E_i \Rightarrow \vec{E}$$

$$E_{i+1} \Rightarrow U\vec{E}$$

$$E_{i-1} \Rightarrow L\vec{E}$$

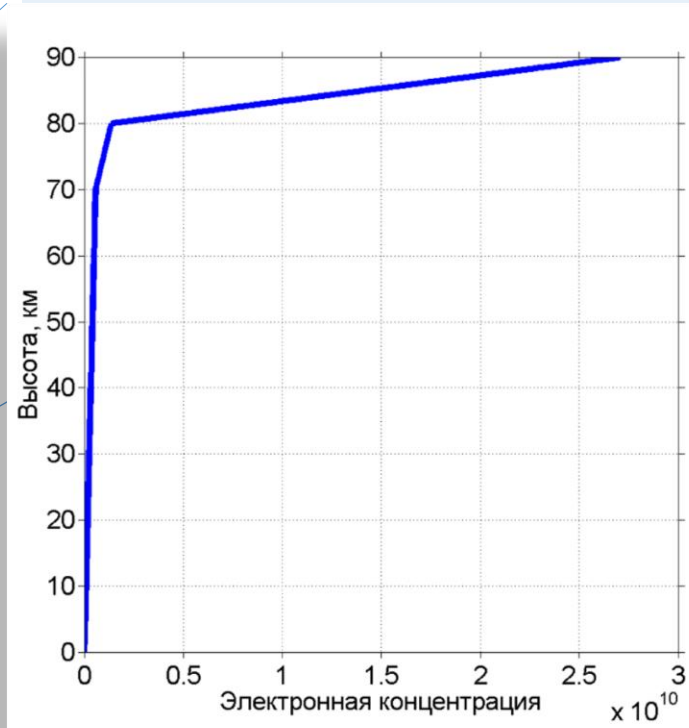
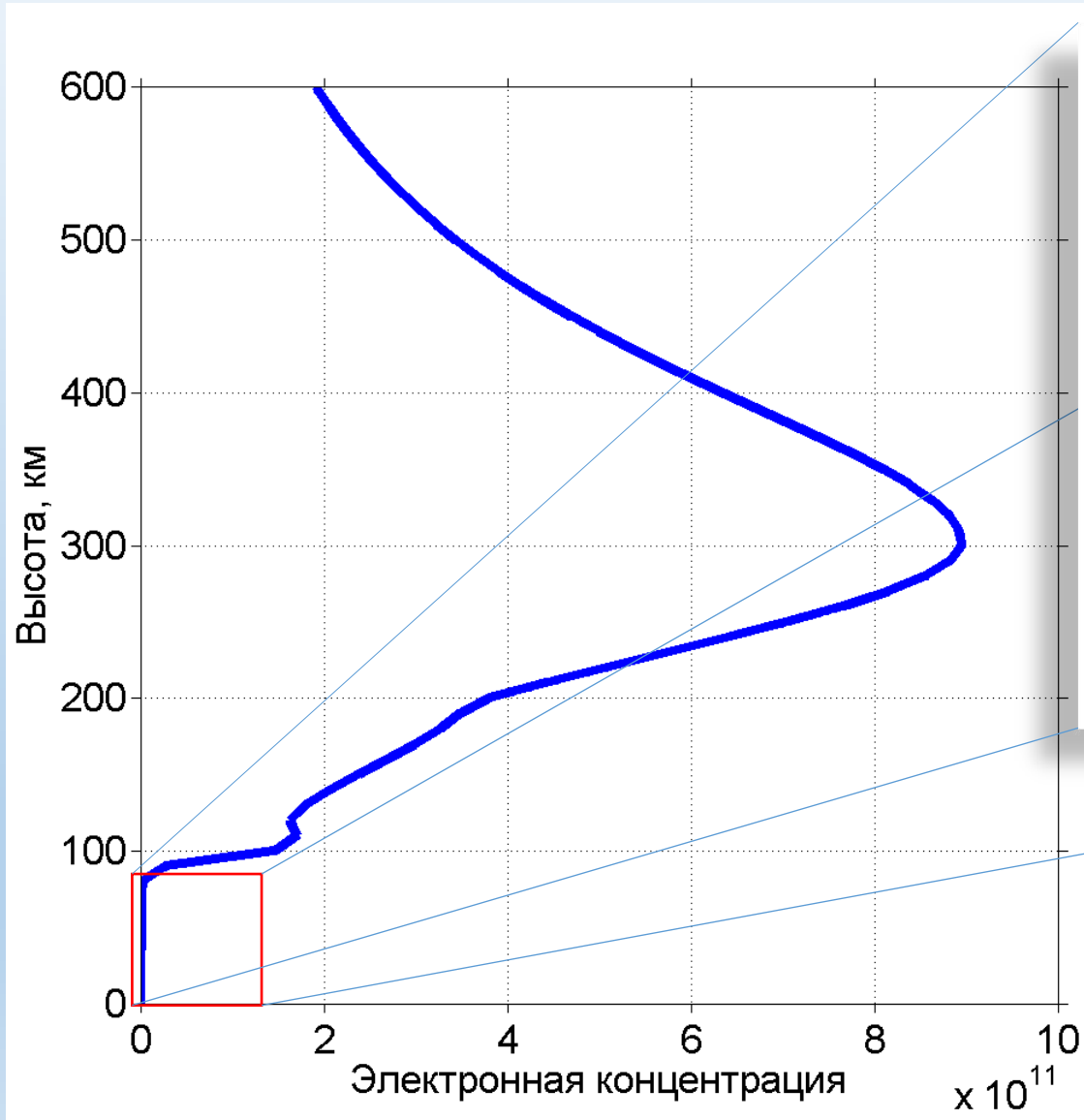
$$i\omega\mu_i\mu_0 J_i \Delta x^2 \Rightarrow \vec{S}$$

$$2 - k_i^2 \Delta x^2 \Rightarrow 2I - \Delta x^2 \text{diag}(\vec{k}^2) = P$$

$$(U - P + L)\vec{E} = \vec{S}$$

$$\vec{E} = (U - P + L)^{-1} \vec{S}$$

Практическое решение задачи 1D

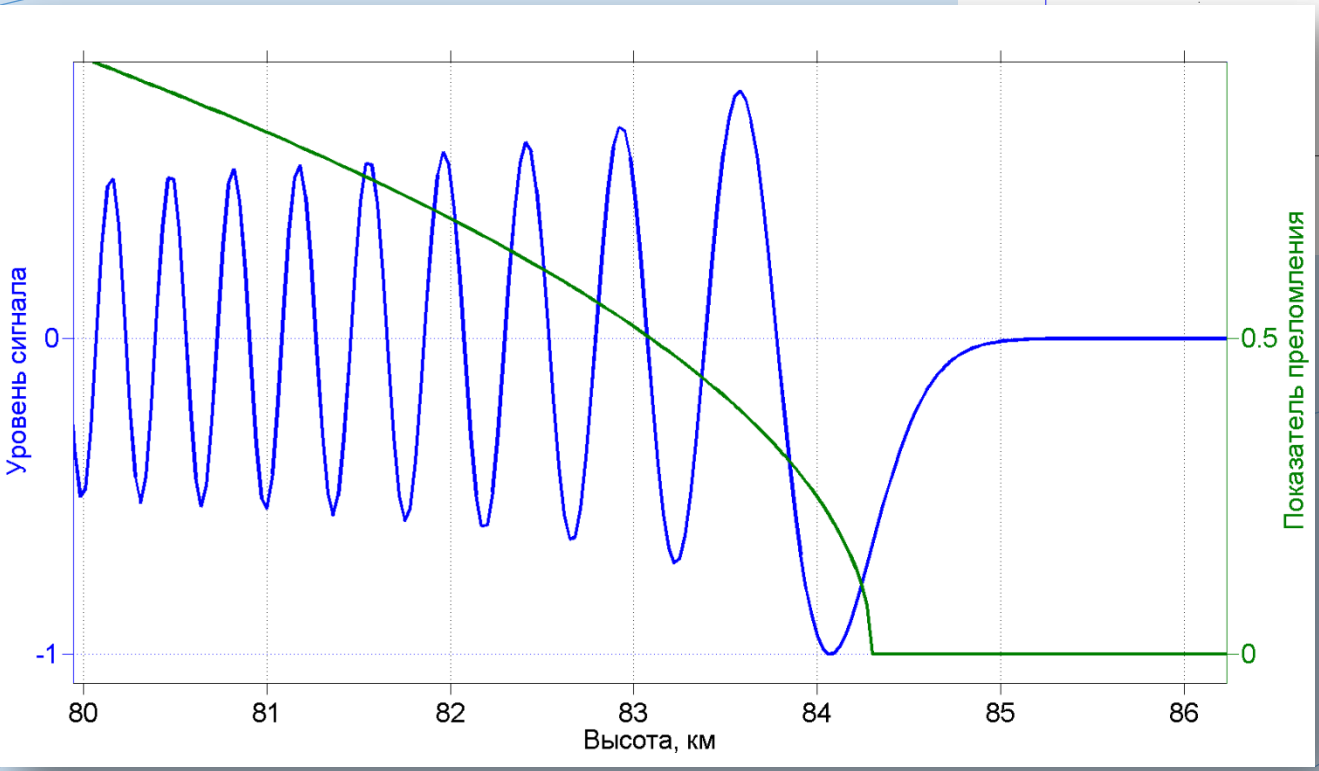
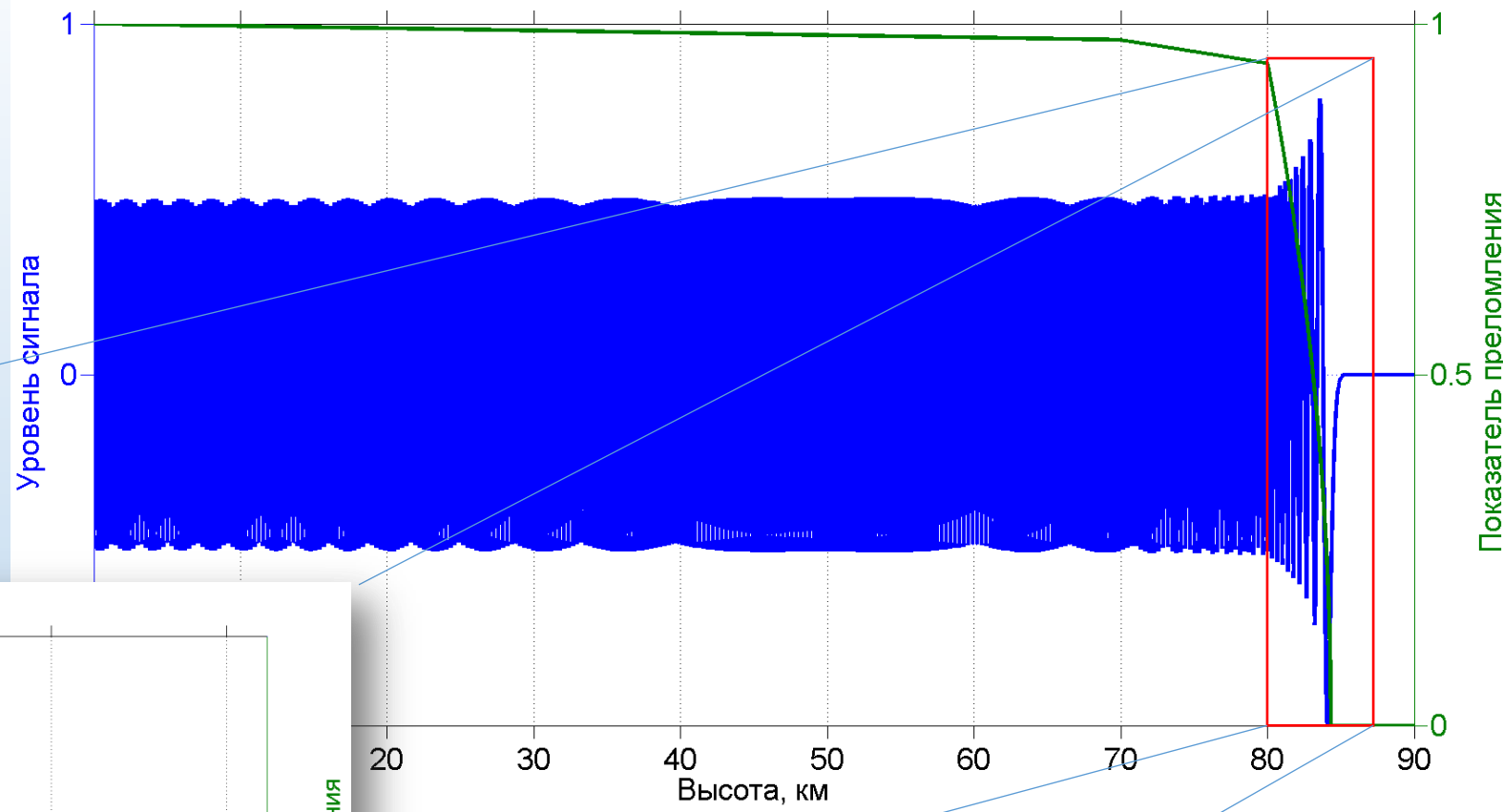


Ионосфера

Свойства среды:

- Неоднородная,
- Изотропная (без учёта магнитного поля),
- Холодная,
- Не проводящая.

Частота: 1 МГц
Длина волны: 300 м
Шаг сетки: 30 м



Применение FDFD-метода для 2-D волнового уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(x, y) + k(x, y)^2 E(x, y) = i\omega \mu(x, y) \mu_0 J(x, y)$$



$$\frac{E_{i+1,j} - 2E_{i,j} + E_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{E_{i,j+1} - 2E_{i,j} + E_{i,j-1}}{\Delta y^2} + k_{i,j}^2 E_{i,j} = i\omega \mu_{i,j} \mu_0 J_{i,j}$$

$$E_{i+1,j} \Rightarrow U_x E \quad E_{i,j+1} \Rightarrow E U_y$$

$$E_{i,j} \Rightarrow E$$

$$E_{i-1,j} \Rightarrow L_x E \quad E_{i,j-1} \Rightarrow E L_y$$

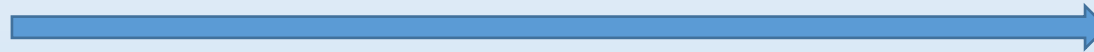
$$\frac{(U_x - 2I + L_x)}{\Delta x^2} E + E \frac{(U_y - 2I + L_y)}{\Delta y^2} + (K^2 \circ E) = i\omega\mu_0(\mu \circ J)$$

- умножение Адамара, поэлементное умножение матриц. $A \circ B = a_{i,j} b_{i,j}$

$$D_x E + E D_y + (K^2 \circ E) = i\omega\mu_0(\mu \circ J)$$

Векторизация матрицы

- матрица



$\vec{\quad}$ - вектор

$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$
$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$
$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$

Считывание по столбцам



() \rightarrow

$m_{1,1}$
$m_{2,1}$
$m_{3,1}$
$m_{1,2}$
$m_{2,2}$
$m_{3,2}$
$m_{1,3}$
$m_{2,3}$
$m_{3,3}$

$$D_x E + E D_y + (K^2 \circ E) = i\omega\mu_0(\mu \circ J)$$

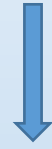


$$(I_y \otimes D_x) \vec{E} + (D_y^T \otimes I_x) \vec{E} + \text{diag}(\text{vec}(K^2)) \vec{E} = \text{vec}(i\omega\mu_0(\mu \circ J)) = \vec{S}$$

- умножение Кронекера

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$$[(I_y \otimes D_x) + (D_y^T \otimes I_x) + \text{diag}(\text{vec}(K^2))] \vec{E} = \vec{S}$$



$$\vec{E} = [(I_y \otimes D_x) + (D_y^T \otimes I_x) + \text{diag}(\text{vec}(K^2))]^{-1} \vec{S}$$

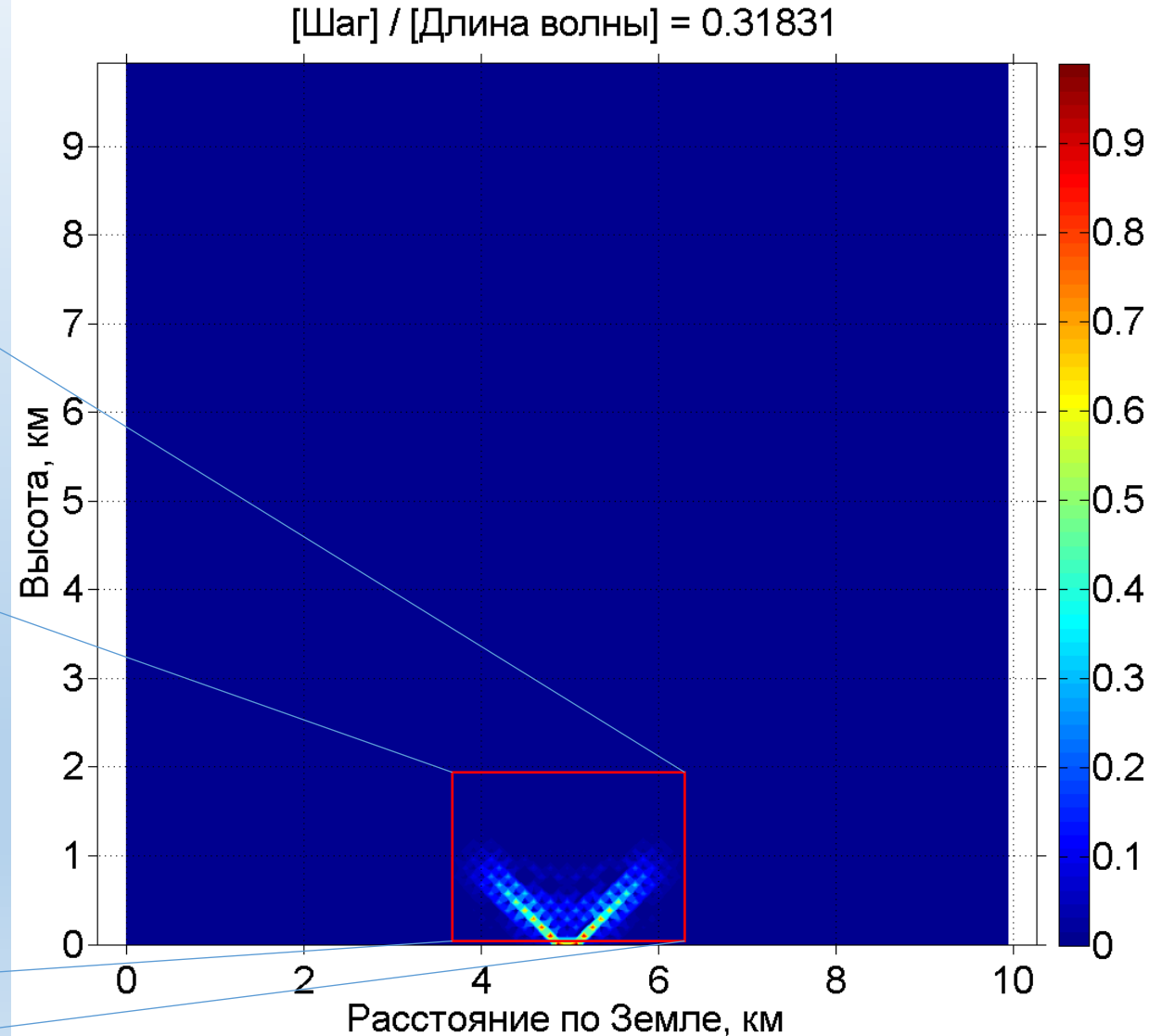
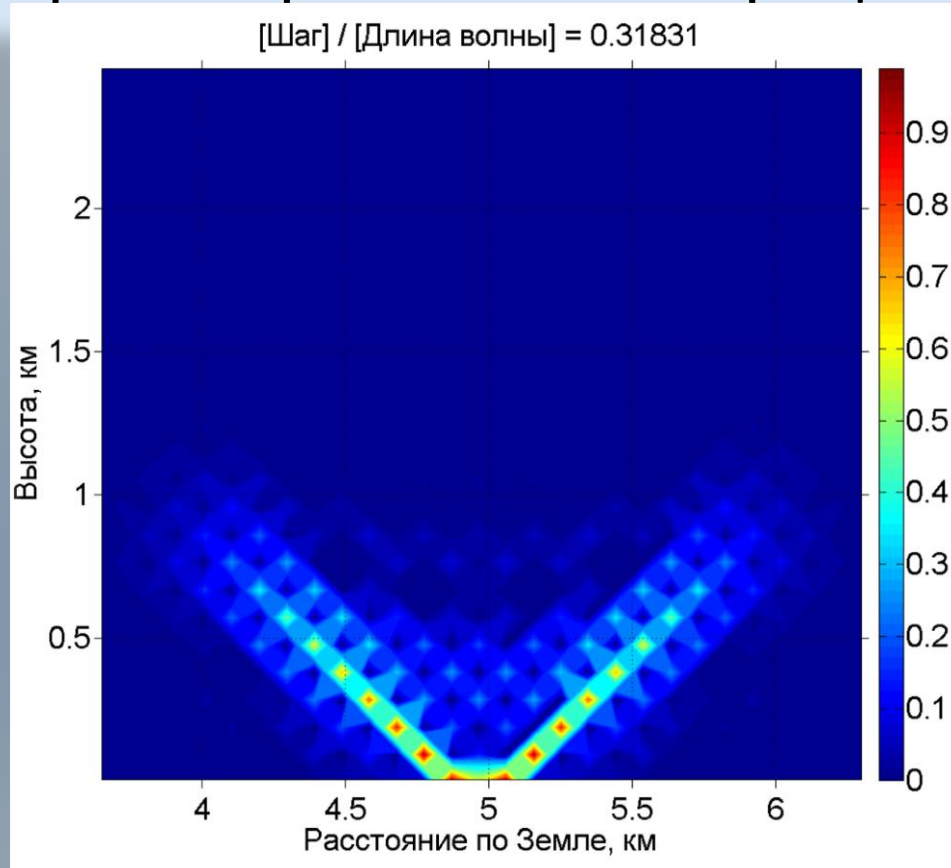
$$\vec{E} \Rightarrow E$$

Практическое решение задачи 2D

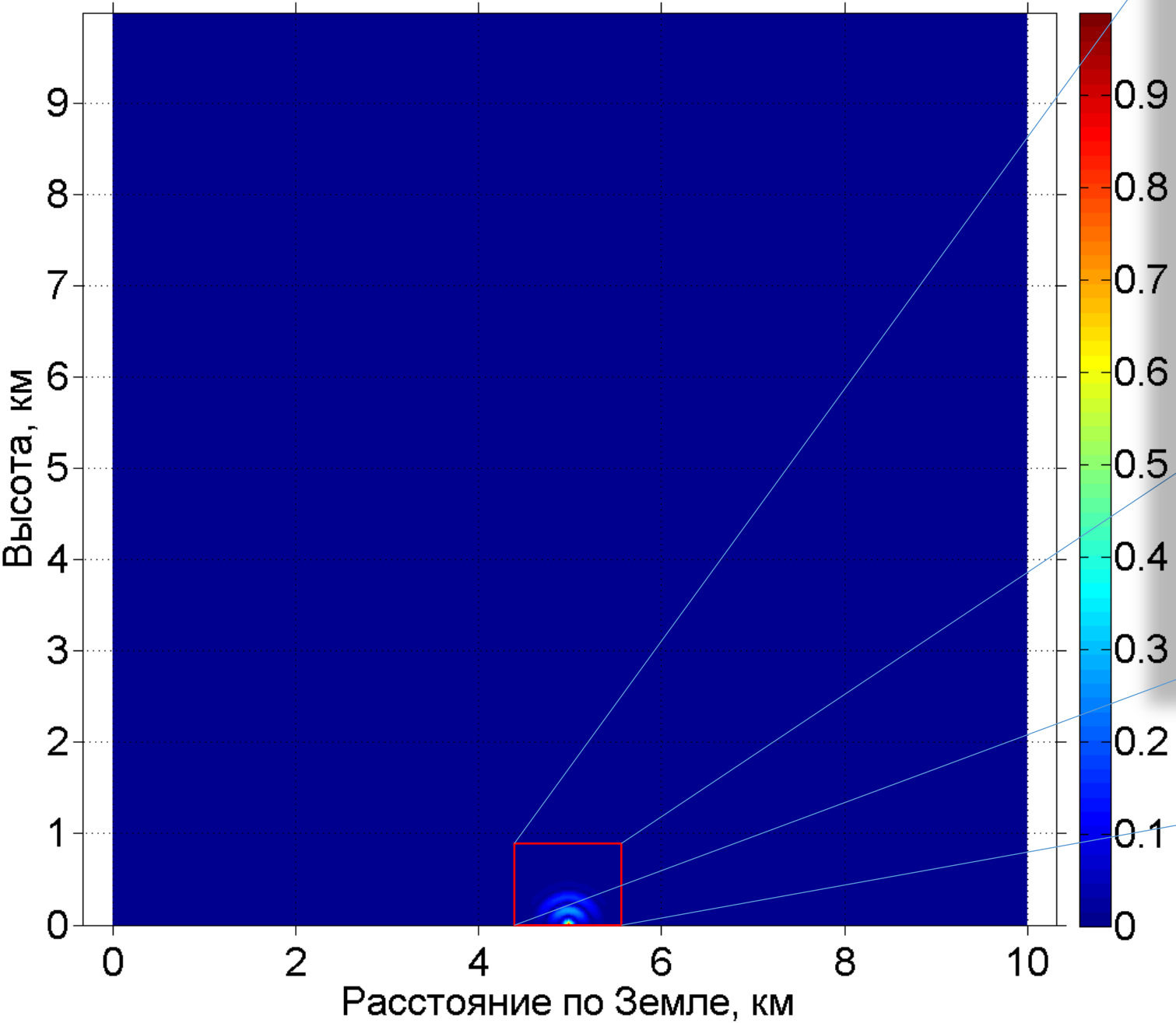
Частота: 1 МГц. Длина волны: 300 м.

Размерность исходной матрицы 101,

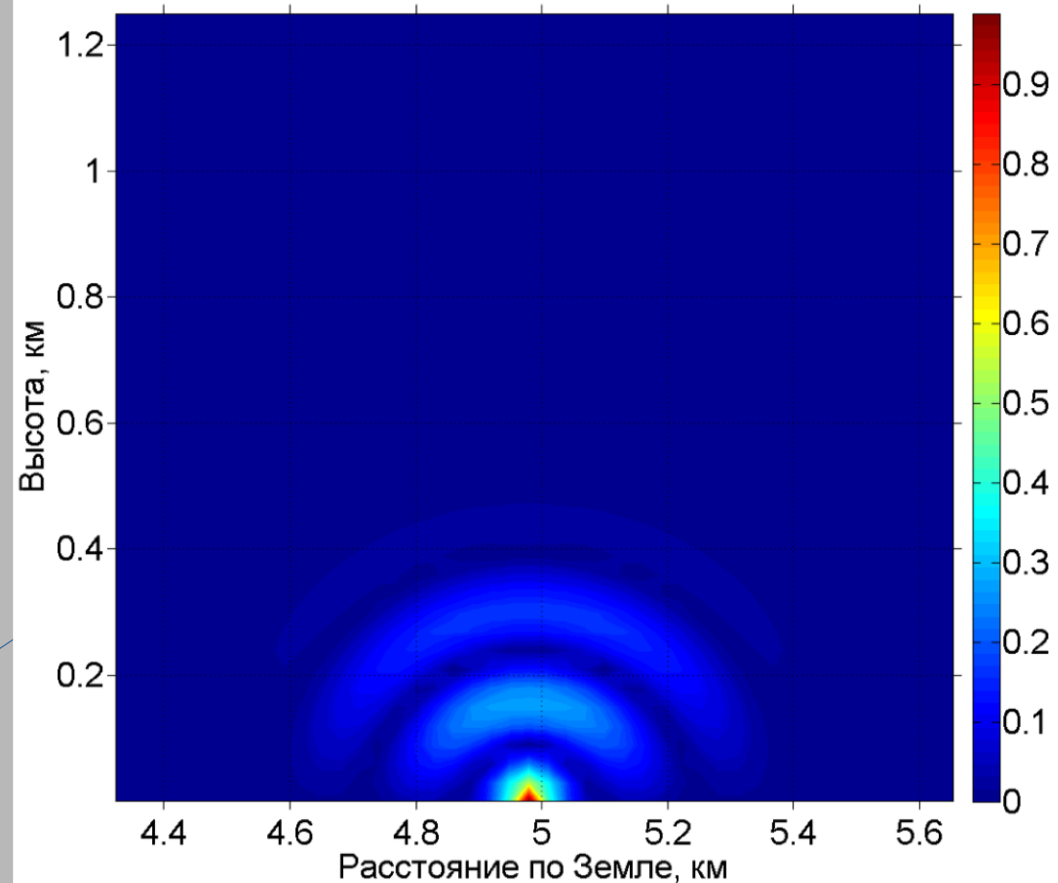
Размерность решаемой матрицы 11025



[Шаг] / [Длина волны] = 0.1



[Шаг] / [Длина волны] = 0.1



Размерность исходной
матрицы 334,
Размерность решаемой
матрицы 111556

Проблемы

- Выбор шага сетки. Шаг существенно влияет на полученное решение,
- Выбор оптимальных математических алгоритмов работы с разряжёнными матрицами для решения конкретной задачи,
- Использование инструментов работы с матрицами без выгрузки данных в оперативную память,
- Использование инструментов позволяющих ускорить работу алгоритма: CUDA,...

**Спасибо за
внимание**